26/3/18

Έστω $f: E \to E$ ένας ενδομορφισμός, $\dim_K E < \infty$
Υποθέτουμε ότι οι ιδιοτιμές του f ανήκουν όλες στο σώμα K, δηλαδή:
$P_f(t) = (\lambda_1 - t)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda_k - t)^{n_k}$ όπου $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του f και $n_1 + \ldots + n_k = n$

(1) Υπάρχει βάση B του E έτσι ώστε:
$M_B^B(f)$: άνω τριγωνικός

(2) Κανονική μορφή Jordan. Ένας στοιχειώδης πίνακας Jordan είναι ένας πίνακας της μορφής:

$$J(n,\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} \qquad \lambda \in K, \; n \geq 1$$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Υπάρχει βάση B στον E έτσι ώστε:

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & & 0 \\ & J_{n_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{n_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}$$

Για παράδειγμα:

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{2} \end{pmatrix} \qquad \to J_2(2)$$

ΑΣΚΗΣΗ: 1 Έστω $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{K})$. Αν $A^3 = 0$, ισχύει ότι $A^2 \neq 0$;

Έστω το πολυώνυμο $Q(t) = t^3$. Τότε: $Q(A) = A^3 = 0$
Άρα: $Q_A(t) \mid Q(t) \Rightarrow Q_A(t) \mid t^3 \Rightarrow Q_A(t) = \cancel{1}, t, t^2, t^3$

- Αν $Q_A(t) = t^3$, τότε επειδή $Q_A(t) \mid P_A(t)$ και $\deg P_A(t) = 2$ θα έχουμε $3 = \deg Q_A(t) \leq 2$: άτοπο
Άρα $Q_A(t) \neq t^3$

- Αν $Q_A(t) = t$, τότε: $0 = Q_A(A) = A$ και $A^2 = 0$

- Αν $Q_A(t) = t^2$, τότε: $0 = Q_A(A) = A^2$ και $A^2 = 0$

Άρα: δεν υπάρχει πίνακας A: $A^3 = 0$ και $A^2 \neq 0$

ΑΣΚΗΣΗ 2 $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ και: $A^3 = 2A$. Είναι ο A: διαγωνοποιήσιμος; Αν $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$ και $A^3 = 2A$ είναι ο A: διαγωνοποιήσιμος;

Θεωρούμε το πολυώνυμο $Q(t) = t^3 - 2t = t(t^2 - 2) =$
$= t \cdot (t - \sqrt{2}) \cdot (t + \sqrt{2})$. Όμως: $Q(A) = A^3 - 2A = 0$ και άρα $Q_A(t) \mid Q(t) \Rightarrow$ το $Q_A(t)$ είναι διαιρέτης του $Q(t) \Rightarrow Q_A(t)$ είναι ένα εκ των: t, $t - \sqrt{2}$, $t + \sqrt{2}$, $t(t - \sqrt{2})$, $t \cdot (t + \sqrt{2})$, $t \cdot (t - \sqrt{2}) \cdot (t + \sqrt{2})$, $(t - \sqrt{2}) \cdot (t + \sqrt{2})$

Σε κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις το $Q_A(t)$ είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων και τότε γνωρίζουμε ότι ο A είναι διαγωνοποιήσιμος

Αν $A \in M_4(\mathbb{Q})$, τότε: $Q_A(t) \mid t\cdot(t^2-2) \Rightarrow$
$\Rightarrow Q_A(t) = t,\ t^2-2,\ t\cdot(t-2)$ και τότε ο
A: διαγωνοποιήσιμος $\Leftrightarrow Q_A(t) = t \Leftrightarrow A = 0$

ΑΣΚΗΣΗ 3. Αν $B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$. Να βρεθεί, αν υπάρχει μία "τετραγωνική" ρίζα του B, δηλαδή: να βρεθεί, αν υπάρχει, πίνακας $A \in M_2(\mathbb{K})$: $A^2 = B$

$$P_B(t) = \begin{vmatrix} 6-t & 2 \\ 3 & 7-t \end{vmatrix} = \dots = (t-9)\cdot(t-4) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ B: διαγωνοποιήσιμος $\Rightarrow \exists$ αντιστρέψιμος πίνακας P : $P^{-1}\cdot B\cdot P = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow B = P\cdot\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\cdot P^{-1} = P\cdot\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot P^{-1} =$$

$$= P\cdot\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2\cdot P^{-1} = \Big(\underbrace{P\cdot\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot P^{-1}}\Big)^2$$

Θέτουμε $A = P\cdot\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot P^{-1}$ και τότε:

$A^2 = B$

- $V(9) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$
- $V(4) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4: $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ $B = A^4 + 5A^3 - 48A^2 - I_2$

Να εκφραστεί ο B^{-1}, αν υπάρχει ο αντίστροφος του B, συναρτήσει των A, I_2: $B^{-1} = \kappa \cdot A + \lambda \cdot I_2$, για κατάλληλα $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} 2-t & -5 \\ -1 & 3-t \end{vmatrix} = t^2 - 5t + 1$$

Θεωρούμε το πολυώνυμο $R(t) = t^4 + 5t^3 - 48t^2 - 1$

Ευκλείδεια Διαίρεση: $R(t) = P_A(t)\,(t^2 + 10t + 1) + (-5t - 2)$

Τότε: $R(A) = \cancel{P_A(A)} \cdot (A^2 + 10A + I_2) + (-5A - 2I_2)$

Άρα: $\boxed{B = -5A - 2I_2} = -5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} -12 & 25 \\ 5 & -17 \end{pmatrix}$$

$$P_B(t) = \begin{vmatrix} -12-t & 25 \\ 5 & -17-t \end{vmatrix} = t^2 + 29t + 79$$

Θ. Cayley - Hamilton: $P_B(B) = 0 \Rightarrow B^2 + 29B + 79I_2 = 0$

$\Rightarrow B(B + 29I_2) = -79I_2 \Rightarrow B^{-1} = -\dfrac{1}{79}(B + 29I_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow B^{-1} = -\dfrac{1}{79}(-5A - 2I_2 + 29I_2) \Rightarrow B^{-1} = -\dfrac{1}{79}(-5A + 27I_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow B^{-1} = \dfrac{5A}{79} - \dfrac{27I_2}{79}$

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΙ ΧΩΡΟΙ

Από τώρα και στο εξής E συμβολίζει έναν διανυσματικό χώρο υπεράνω του $\mathbb{R}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Εσωτερικό γινόμενο επί του E είναι μία απεικόνιση: $\langle \, , \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$, $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ έτσι ώστε:

1. $\langle \vec{x_1} + \vec{x_2}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x_1}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{x_2}, \vec{y} \rangle$ Γραμμικότητα ως προς την $1^{η}$ μεταβλητή
2. $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$ Συμμετρία
3. $\langle \lambda \vec{x}, \vec{y} \rangle = \lambda \cdot \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ Γραμμικότητα ως προς την $1^{η}$ μεταβλητή
4. $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0$ και $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$ Ιδιότητα Θετικά Ορισμένου

Ένας Ευκλείδειος Χώρος είναι ένα ζεύγος $(E, \langle , \rangle)$ όπου: E: $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος και $\langle , \rangle$: εσωτερικό γινόμενο επί του E.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν $(E, \langle , \rangle)$ είναι ένας ευκλείδειος χώρος, τότε ισχύει η γραμμικότητα ως προς τη δεύτερη μεταβλητή:

$\langle \vec{x}, \vec{y_1} + \vec{y_2} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y_1} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{y_2} \rangle$ και

$\langle \vec{x}, \lambda \vec{y} \rangle = \lambda \cdot \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$

Πράγματι: $\langle \vec{x}, \vec{y_1} + \vec{y_2} \rangle \overset{2}{=} \langle \vec{y_1} + \vec{y_2}, \vec{x} \rangle \overset{1}{=}$
$= \langle \vec{y_1}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{y_2}, \vec{x} \rangle \overset{2}{=} \langle \vec{x}, \vec{y_1} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{y_2} \rangle$.

Παρόμοια: $\langle \vec{x}, \lambda \vec{y} \rangle \overset{2}{=} \langle \lambda \vec{y}, \vec{x} \rangle \overset{3}{=} \lambda \cdot \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle =$
$\overset{2}{=} \lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν $(E, \langle , \rangle)$ είναι ένας Ευκλείδειος χώρος, και: $\vec{x} \in E$, τότε: $\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0, \forall \vec{y} \in E$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

"$\Rightarrow$" Έστω ότι $\vec{x} = \vec{0}$ και $\vec{y} \in E$. Τότε:

$\langle \vec{0}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{0} + \vec{0}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{0}, \vec{y} \rangle + \cancel{\langle \vec{0}, \vec{y} \rangle} \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle \vec{0}, \vec{y} \rangle = 0$

"$\Leftarrow$" Αν $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$, $\forall \vec{y} \in E$, τότε: θέτοντας $\vec{y} = \vec{x}$:

$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$

Ιδιαίτερα: $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E$: $\vec{x} = \vec{y} \Leftrightarrow \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$

Πράγματι: $\vec{x} = \vec{y} \Leftrightarrow \vec{x} - \vec{y} = \vec{0} \Leftrightarrow \langle \vec{x} - \vec{y}, \vec{z} \rangle = 0$, $\forall \vec{z} \in E \Leftrightarrow \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$, $\forall \vec{z} \in E$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: 1 Στον $\mathbb{R}$-δ.χ. $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$

Ορίζουμε απεικόνιση:

$\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$\langle (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \rangle =$

$= x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

$\langle (x_1, x_2, \dots, x_n), (x_1, x_2, \dots, x_n) \rangle = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq 0$ και είναι ίσο με το $0 \Leftrightarrow x_i = 0$, $1 \leq i \leq n \Leftrightarrow$

$(x_1, x_2, \dots, x_n) = \vec{0} = (0, 0, \dots 0)$